第4講　剰余の定理と因数定理，高次方程式

§1 ▶ 剰余の定理

要点整理 と 公式

要点 1 剰余の定理

x についての整式を $P(x)$ などと書く。

また，整式 $P(x)$ の x に，ある数 k を代入したときの値を $P(k)$ と書く。

(ex) $P(x) = x^2 + 3x - 4$ とすると，$P(2) = 2^2 + 3\cdot 2 - 4 = 6$

$P(x) = x^2 + 3x - 4$ について，$P(x)$ を $x - 2$ で割ると，

商が $x + 5$，余りが 6 である。このことから，除法の原理により，

$P(x) = (x - 2)(x + 5) + 6$

と表される。この両辺に $x = 2$ を代入すると，

$P(2) = \qquad \cdot 7 + 6 =$

となり，この値は余り 6 と一致する。

$$
\begin{array}{r}
x + 5 \\
x-2\,\overline{\smash{)}\,x^2+3x-4} \\
\underline{x^2-2x} \\
5x-4 \\
\underline{5x-10} \\
6
\end{array}
$$

整式 $P(x)$ を 1 次式 $x - k$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを R とすると，

R は定数となる。このとき，除法の原理より

$P(x) = (x - k)Q(x) + R$

と表される。この両辺に $x = \qquad$ を代入すると

$P(\quad) = \qquad \cdot Q(\quad) + R = R$

となり，この値は余り R と一致する。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって，以下の定理が成り立つ。

■ 剰余の定理

整式 $P(x)$ を 1 次式 $x-k$ で割った余りは $P(k)$ である。

この剰余の定理を用いると，整式を 1 次式で割ったときの余りを，実際に割り算することなく簡単に求めることができる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

整式 $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ を次の1次式で割ったときの余りを求めよ。

(1)　$x - 1$　　(2)　$x + 3$　　(3)　$2x - 1$

Point Pickup

整式 $P(x)$ を1次式で割ったときの余り

$\Longrightarrow$　剰余の定理を利用する

割る式が　$x - k$　のとき　$\Longrightarrow$　余りは　$P(k)$

割る式が　$ax + b$　のとき　$\Longrightarrow$　余りは　$P\left(-\dfrac{b}{a}\right)$

整式 $P(x)$ を1次式 $ax + b$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを R とすると

$P(x) =$　　　　　　　　と表される。

$ax + b =$　　　となる x は $ax = -b$　より　$x = -\dfrac{b}{a}$

よって，$P\left(-\dfrac{b}{a}\right) = R$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 因数定理

要点整理 と 公式

要点2 因数定理

整式 $P(x)$ を１次式 $x-k$ で割ったときの余りが０，つまり $x-k$ で割り切れるとき，

剰余の定理より $P(k)=0$ である。

このとき，$P(x)=(x-k)Q(x)$ の形で表されることより，

$x-k$ は $P(x)$ の「　　　」であることがわかる。

よって，以下の定理が成り立つ。

■ 因数定理

整式 $P(x)$ が $x-k$ を因数にもつ　$\Longleftrightarrow$　$P(k)=0$

この因数定理を用いると，３次式やそれ以上の次数の式を因数分解することができる。

(ex) $P(x)=x^3-4x^2+x+6$ について

$P(1)=1^3-4\cdot1^2+1+6=4$　　よって，$x-1$ は $P(x)$ の因数「　　　」

$P(2)=2^3-4\cdot2^2+2+6=0$　　よって，$x-2$ は $P(x)$ の因数「　　　」

$P(x)\div(x-2)$ を計算することにより

$P(x)=(x-2)(x^2-2x-3)$

$=(x-2)(x+1)(x-3)$

$$
\begin{array}{r}
x^2-2x-3 \\
x-2\,\overline{)\,x^3-4x^2+x+6} \\
x^3-2x^2 \\
\hline
-2x^2+x \\
-2x^2+4x \\
\hline
-3x+6 \\
-3x+6 \\
\hline
0
\end{array}
$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

因数定理を用いて，$2x^3 + 9x^2 - 6x - 5$ を因数分解せよ。

Point Pickup

次数が高い整式の因数分解

$\Longrightarrow$　因数定理を利用する

①　$P(k) = 0$　となる k を見つける。

k の値の候補は　$\pm\dfrac{\text{定数項の約数}}{\text{最高次の項の係数の約数}}$　である。

②　$P(x) \div (\qquad\quad)$　を計算する。

その商を $Q(x)$ とすると，因数定理より $P(x) = (x - k)Q(x)$ となる。

③　$Q(x)$ を因数分解する。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 組立除法と因数分解

要点整理 と 公式

要点3 組立除法

整式 $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ を1次式 $x - k$ で割ったときの商を $Q(x) = Ax^2 + Bx + C$, 余りを R とする。

除法の原理より $P(x) = (x - k)Q(x) + R$

つまり　$ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - k)(Ax^2 + Bx + C) + R$　が成り立つ。

右辺を x について整理すると

$$Ax^3 + (B - Ak)x^2 + (C - Bk)x + (R - Ck)$$

これを左辺と「係数比較」して

$$A = a,\ B - Ak = b,\ C - Bk = c,\ R - Ck = d$$

つまり $A = a$, $B = b + Ak$, $C = c + Bk$, $R = d + Ck$ となる。

これを図示すると以下のようになる。

a	b	c	d
	Ak	Bk	Ck
A	B	C	R

これを用いると，整式$P(x)$を 1 次式で割ったときの商と余りを求めることができる。

(ex) $2x^3 - 5x^2 + 3x - 10$ を $x - 3$ で割ったときの商と余りを求める。

2	−5	3	−10	

この手順を「　　　　　　」という。

この組立除法を用いると，3 次式やそれ以上の次数の式を因数分解するときに，筆算の計算をせずに求めることができる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

(1)　組立除法を用いて，整式 $x^3 - 7x^2 - 11x + 10$ を $x + 2$ で割ったときの商と余りを求めよ。

(2)　組立除法を用いて，整式 $x^3 + x^2 - 21x - 45$ を因数分解せよ。

Point Pickup

次数が高い整式の因数分解 その②

①　$P(k) = 0$ となる k の見当をつける。

k の値の候補は　$\pm \dfrac{\text{定数項の約数}}{\text{最高次の項の係数の約数}}$　である。

②　$P(x) \div (x - k)$ を「　　　　　」で計算する。

その商を $Q(x)$，余りを R とするとき，$R = 0$ になるまで①と②を繰り返す。

$R = 0$ のとき，因数定理より $P(x) = (x - k)Q(x)$ となる。

③　$Q(x)$ を因数分解する。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 高次方程式の解法

要点整理 と 公式

要点4 高次方程式

x の整式 $P(x)$ を n 次の整式とするとき，$P(x)=0$ の形で表される方程式を「n 次方程式」という。とくに，3 次以上の方程式を「高次方程式」という。

要点5 因数分解による解法

(ex) 3 次方程式 $x^3=1$ を解く。

移項して $x^3-1=0$

左辺を因数分解すると

よって，$x-1=0$ または $x^2+x+1=0$

したがって $x=1,$

※ 3 乗して a になる数を，a の「3 乗根」(または「立方根」)という。

a の 3 乗根は，方程式 $x^3=a$ の解である。

要点6 因数定理による解法

(ex) 3 次方程式 $x^3-2x^2-5x+6=0$ を解く。

$P(x)=x^3-2x^2-5x+6$ とすると，$P(1)=0$ より

$P(x)$ は $x-1$ を「　　　　　　」

$P(x)=(x-1)(x^2-x-6)=(x-1)(x+2)(x-3)$

よって $P(x)=0$ の解は $x=1,\ -2,\ 3$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

要点7 重解

方程式 $(x-2)^2(x+3)=0$ の解は $x=2,\ -3$ である。

この方程式の解 2 を，この方程式の「2 重解」(または「重解」)という。

また，方程式$(x+1)^3=0$ の解 -1 を，この方程式の「3 重解」という。

2 重解を重なった 2 個の解，3 重解を重なった3 個の解と考えると，

複素数の範囲において，2 次方程式は常に 2 個，3 次方程式は常に 3 個の解をもつ。

一般に，複素数の範囲において，「n 次方程式は n 個の解をもつ」ことが知られている。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

次の方程式を解け。

(1)　$x^3 + 27 = 0$

(2)　$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

(3)　$x^3 - 3x^2 - 8x - 4 = 0$

(4)　$x^3 + 4x^2 - 3x - 18 = 0$

Point Pickup

高次方程式 $P(x) = 0$ の解法

公式や因数定理を用いて，$P(x)$ を 1 次式または 2 次式の積の形に因数分解する。

特に断りがないときは，解は複素数の範囲で答える。

複2次式

$x^4 - 4x^2 + 3$ のように，4 次式のうち，3 次と 1 次の項がない式を

「複 2 次式」という。

複 2 次式の因数分解は，$x^2 = t$ とおきかえると，2 次式の因数分解に帰着する。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第4講　確認テスト

1　$P(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$ を $x + 1$ で割った余りは $\boxed{アイ}$ である。

2　$P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ とすると，$P(2) = \boxed{ウ}$ である。よって，因数定理より

$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x - 2)(x^2 - x - \boxed{エ}) = (x - 2)(x + \boxed{オ})(x - \boxed{カ})$ と

因数分解できる。

3　次の方程式を解け。

(1)　$x^3 + 8 = 0$　　$x = \boxed{キク},\ \boxed{ケ} \pm \sqrt{\boxed{コ}}\,i$

(2)　$x^4 + 3x^2 - 10 = 0$　　$x = \pm\sqrt{\boxed{サ}},\ \pm\sqrt{\boxed{シ}}\,i$

(3)　$x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$　　$x = \boxed{ス},\ \boxed{セソ} \pm \sqrt{\boxed{タ}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第4講　剰余の定理と因数定理，高次方程式

1

(1)　$P(1)=1^3+3\cdot 1^2-2\cdot 1+4=6$

(2)　$P(-3)=(-3)^3+3(-3)^2-2(-3)+4=10$

(3)　$P\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+3\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-2\cdot\dfrac{1}{2}+4=\dfrac{31}{8}$

2

$P(x)=2x^3+9x^2-6x-5$　とおくと

$P(1)=2\cdot 1^3+9\cdot 1^2-6\cdot 1-5=0$

よって　$P(x)$は$x-1$を因数にもつ。

したがって　$P(x)=(x-1)(2x^2+11x+5)=(x-1)(x+5)(2x+1)$

3

(1)

$$
\begin{array}{rrrr|r}
1 & -7 & -11 & 10 & -2 \\
 & -2 & 18 & -14 & \\
\hline
1 & -9 & 7 & -4 &
\end{array}
$$

よって，商 x^2-9x+7　余り -4

(2)　$P(x)=x^3+x^2-21x-45$　とおくと，

$$
\begin{array}{rrrr|r}
1 & 1 & -21 & -45 & -3 \\
 & -3 & 6 & 45 & \\
\hline
1 & -2 & -15 & 0 &
\end{array}
$$

$P(-3)=0$

よって，$P(x)$は$x+3$　を因数にもつので

組立除法を用いると，商は　$x^2-2x-15$　となる。

したがって

$P(x)=(x+3)(x^2-2x-15)=(x+3)(x+3)(x-5)=(x+3)^2(x-5)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

(1)　$x^3+27=0$

$(x+3)(x^2-3x+9)=0$

よって　$x=-3,\ \dfrac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

(2)　$x^2=t$　とおくと　$t^2-3t-4=0$　　$(t+1)(t-4)=0$

つまり　$(x^2+1)(x^2-4)=0$

よって　$x^2+1=0$　または　$x^2-4=0$

したがって　$x=2,\ -2,\ \pm i$

(3)　$P(x)=x^3-3x^2-8x-4$　とおくと

$P(-1)=0$　より　$P(x)$は$x+1$　を因数にもつ。

よって$P(x)=(x+1)(x^2-4x-4)$

$P(x)=0$　より　$x+1=0$　または　$x^2-4x-4=0$

したがって　$x=-1,\ 2\pm2\sqrt{2}$

1	−3	−8	−4	−1
	−1	4	4	
1	−4	−4	0	

(4)　$P(x)=x^3+4x^2-3x-18$　とおくと

$P(2)=0$　より$P(x)$は$x-2$を因数にもつ。

よって　$P(x)=(x-2)(x^2+6x+9)$

$=(x-2)(x+3)^2$

$P(x)=0$　より　$x=2,\ -3$

1	4	−3	−18	2
	2	12	18	
1	6	9	0	

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第4講　確認テスト

1　$P(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$ を $x + 1$ で割った余りは［アイ］である。

2　$P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ とすると，$P(2) =$［ウ］である。よって，因数定理より

$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x - 2)(x^2 - x -$［エ］$) = (x - 2)(x +$［オ］$)(x -$［カ］$)$ と

因数分解できる。

3　次の方程式を解け。

(1)　$x^3 + 8 = 0$　　$x =$［キク］，［ケ］$\pm\sqrt{［コ］}i$

(2)　$x^4 + 3x^2 - 10 = 0$　　$x = \pm\sqrt{［サ］}$，$\pm\sqrt{［シ］}i$

(3)　$x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$　　$x =$［ス］，［セソ］$\pm\sqrt{［タ］}$

｛解答｝

1　ア　−　　イ　3

2　ウ　0　　エ　6　　オ　2　　カ　3

3　(1)　キ　−　　ク　2　　ケ　1　　コ　3

(2)　サ　2　　シ　5

(3)　ス　1　　セ　−　　ソ　1　　タ　2

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。